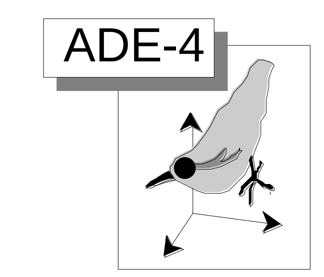


Manuel d'utilisation - V

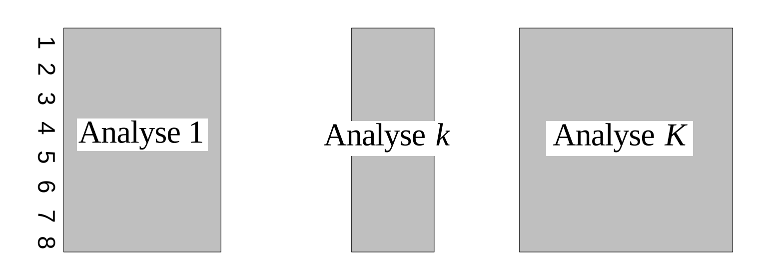
K+1

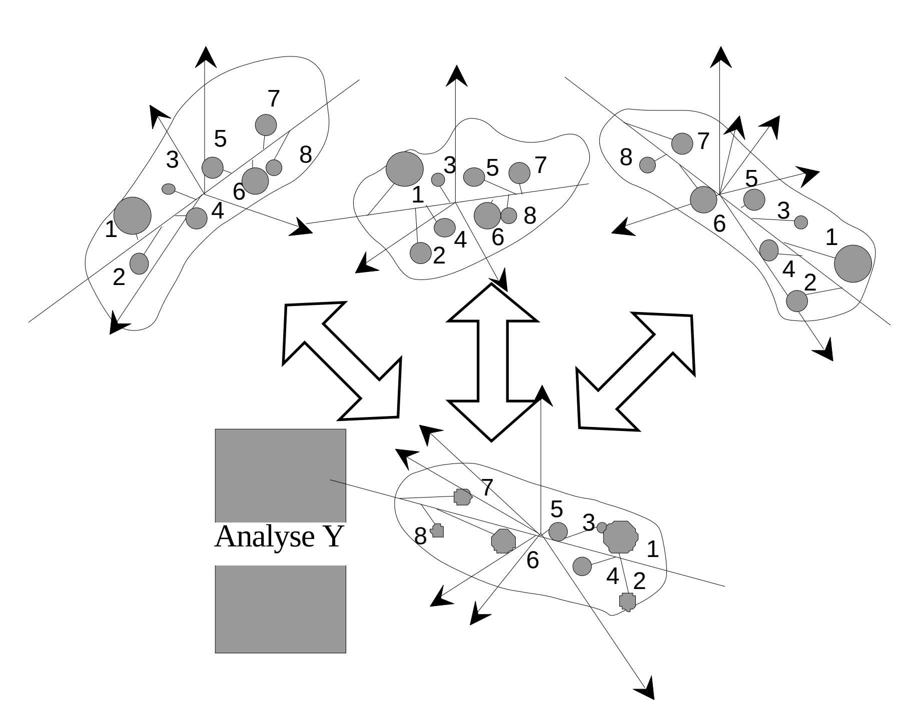
Révision - 03/06/98

K+1 : Concordance analysis



Méthode d'analyse multi-tableaux étudiant la coinertie de K tableaux avec un même tableau de référence de Lafosse & Hanafi (1998)[1].





On considère K études statistiques $(\mathbf{X}_k, \mathbf{Q}_k, \mathbf{D})$ $(1 \le k \le K)$ portant sur les mêmes n individus et K groupes de variables, comptant respectivement $p_1, p_2, \ldots, p_K$ descripteurs. On considère une étude de référence $(\mathbf{Y}, \mathbf{Q}, \mathbf{D})$ portant sur les mêmes n individus et q variables. On appellera Analyse de Concordances (CONCORD) du multi-tableau $\mathbf{X}$ avec le tableau $\mathbf{Y}$ au pas 1, la recherche de k vecteurs $\mathbf{u}_k^1$ normés dans chaque espace R^{p_k}, et d'un vecteur $\mathbf{v}^1$, normé dans l'espace vectoriel R^q, qui maximise la quantité :

$$g(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_K, \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{K} \pi_k \left(\mathbf{X}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{u}_k | \mathbf{YQv} \right)_{\mathbf{D}}^2$$

Les π_k sont une pondération *apriori* des tableaux de départ. Au pas 2, on cherche des solutions $\mathbf{u}_k^2$ normé dans chaque espace R^{p_k}, et un vecteur normé $\mathbf{v}^2$ dans R^q qui maximise la même quantité sous contrainte d'orthogonalité. Au pas s, la même quantité est maximisée sous les contraintes :

$$\left(\mathbf{v}^j \middle| \mathbf{v}^s \right)_{\mathbf{Q}} = 0 \quad (1 \le j < s) \text{ et } \left(\mathbf{u}_k^j \middle| \mathbf{u}_k^s \right)_{\mathbf{Q}_k} = 0 \quad (1 \le j < s, 1 \le k \le K) \,.$$

La relation fondamentale :

$$\sum_{k=1}^{K} \pi_k \left(\mathbf{X}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{u}_k | \mathbf{YQv}\right)_{\mathbf{D}}^2 = \sum_{k=1}^{K} \pi_k \left(\mathbf{Y}^t \mathbf{D} \mathbf{X}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{u}_k | \mathbf{v}\right)_{\mathbf{Q}}^2 = \sum_{k=1}^{K} \pi_k \left(\mathbf{Z}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{u}_k | \mathbf{v}\right)_{\mathbf{Q}}^2$$

montre que la méthode CONCORD [1] est une variante de l'utilisation de l'analyse de coinertie généralisée (ACOM) [2] sur les opérateurs de coinertie et repose sur les mêmes principes.

L'option utilise une seule fenêtre de dialogue :

Concordance analysis
k+1 input file
Table weights (default = 1/Inertia)
Selected axis number (default = 4)
Quit
Ok

Nom du fichier d'entrée de type ---.k+1 créé par K+1 : Initialize.

Option de pondération (π_k) des tableaux dans l'analyse. Trois options sont disponibles :

1 — Les tableaux sont pondérés par l'inverse de leur inertie. C'est l'option par défaut. Cela revient à utiliser une dilatation qui ramènera chaque tableau à une inertie totale de 1 sans changer la répartition de l'inertie entre les axes.

2 — Les tableaux sont uniformément pondérés. Cela laisse jouer à une éventuelle variation d'inertie entre tableaux un rôle potentiellement important. Peut s'employer pour les K-tableaux dérivés des cubes de données. Dés que l'inertie varie fortement d'un tableau à l'autre, le rôle joué par les *gros* tableaux est néfaste (exactement comme en ACP centrée lorsque les variances sont hétérogènes).

3 — Les tableaux sont pondérés par l'inverse de la première valeur propre de leur analyse. C'est l'option par défaut dans l'option KTA-MFA : Multiple Factor Analysis Cela revient à utiliser une dilatation qui ramènera chaque tableau à une inertie projetée sur son premier axe de 1 sans changer la répartition de l'inertie entre les axes. Cette option laisse jouer un rôle plus grand aux tableaux qui ont plusieurs valeurs propres proche de la première. Ce peut être un avantage ou un inconvénient. Pour une utilisation occasionnelle l'option par défaut est conseillée.

Nombre d'axes conservés dans l'analyse. La méthode CONCORD (comme l'ACOM dont elle dérive) ne possède pas de décomposition en valeurs propres qui permet de choisir ce paramètre au cours de l'étude. Il est rarissime d'avoir à dépasser 4. Pour faire un choix motivé, utiliser d'abord les résultats de K+1 : Initialize. On retiendra le nombre d'axes maximum qu'on aurait retenu pour un seul tableau. On ne peut de toute manière pas dépasser le minimum du rang des opérateurs de coinertie, c'est-à-dire le nombre de valeurs propres non nulles le plus petit parmi les analyses de coinertie séparées. L'ajustement est fait automatiquement par le programme si la valeur demandée est trop grande.



Utiliser l'exemple [3] mis en place dans K+1 : Initialize.

Concordance analysis
k+1 input file: A.k+1
Table weights (default = 1/Inertia): 3
Selected axis number (default = 4): 2

Le dépouillement s'appuie sur les pratiques rencontrées dans le module CoInertia.

```
K+1-Generalized co-inertia analysis
Input file A.k+1
Row number: 91, Column number: 9, Block number: 10
```

Le tableau traité est dans le fichier A.k+1ta créé par l'option Initialize.

Les 91 ($p_1 + p_2 + ... + p_K$) lignes sont les variables des tableaux $\mathbf{X}_k$. Les 9 colonnes sont les variables de $\mathbf{Y}$. On rappelle l'option de pondération utilisée :

```
Selected weight option
    -> First eigenvalue from separate analysis
```

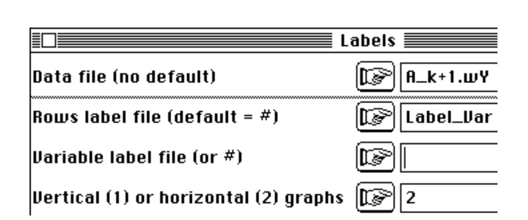
Les maxima du critère optimisé sont édités :

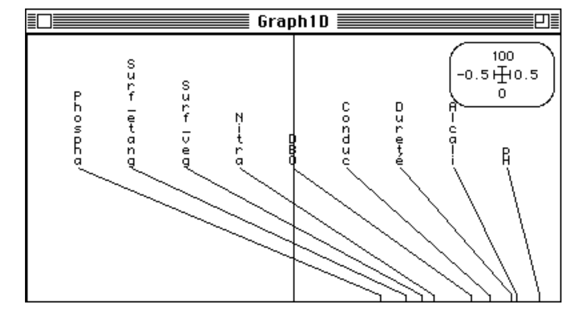
```
vp level 1=7.8524e-01
vp level 1=7.7061e-02
```

Les axes de co-inertie dans l'espace des lignes du tableau $\mathbf{Y}$ sont calculés. Ce sont ici les poids des variables de milieu utilisés comme dans une ACP ordinaire.

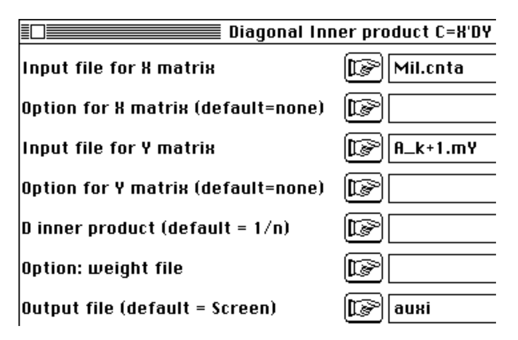
```
File A_k+1.wY contains co-inertia axes of the Y table (unit norm)
It has 9 rows and 2 columns
File :A_k+1.wY
|Col.|   Mini   |   Maxi   |
|----|----------|----------|
|   1| 1.639e-01| 4.603e-01|
|   2|-2.075e-01| 7.293e-01|
|----|----------|----------|
```

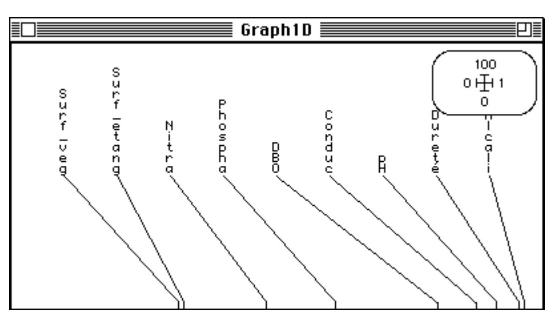
On ne dépouillera que le premier niveau de l'analyse, les analyses de coinertie séparées montrant des structures de dimension 1.



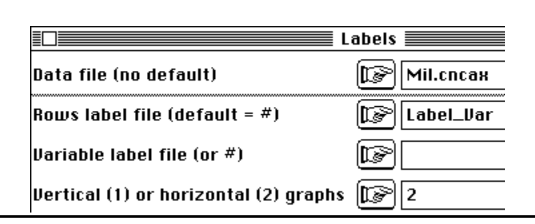


Pour optimiser la liaison simultanée avec tous les tableaux faunistiques, l'analyse crée une combinaison de variables de poids tous positifs. Il est prudent de comparer ces poids avec les corrélations entre les variables et la combinaison ainsi créée :

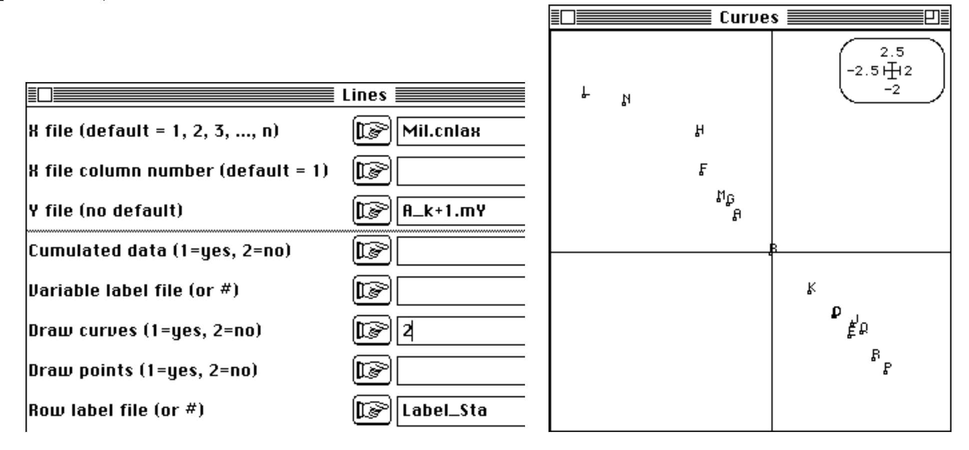




La cohérence est bonne et on peut aussi comparer avec les poids de la première coordonnée de l'ACP normée de Mil :



On observera que les variables conductivité, DBO, dureté, alcalinité et pH sont fortement corrélées, ce qui constitue l'axe d'inertie et, en insistant sur la variable pH, l'axe de co-inertie. On vérifiera encore que le score normalisé de co-inertie et le score normalisé d'inertie (composante principale) sont très voisins au signe près (ce qui est sans importance) :



L'article cité souligne, en conclusion, que cette structure d'ordination sur l'acidité des eaux des étangs inventoriés dépend directement de leur environnement végétal (landes acides et forêts de conifères contre prairies et forêts de feuillus, Tab. 5 p. 102).

Du côté des tableaux faunistiques, si le principe est le même, les résultats sont fort différents. Chaque groupe faunistique définit son propre ensemble de poids :

```
File A_k+1.wX contains co-inertia axes of the XK table (unit norm)
It has 91 rows and 2 columns
File :A_k+1.wX
|Col.|   Mini   |   Maxi   |
|----|----------|----------|
|   1|-2.651e+00| 2.280e+00|
|   2|-2.095e+00| 2.395e+00|
|----|----------|----------|
```

Labels
Data file (no default) A_k+1.wX
Rows label file (default = #) Label_Esp
Variable label file (or #)
Vertical (1) or horizontal (2) graphs 2

Row & col. selection
Col. selection: 1
Row selection method: File / Keyboard
Row selection file (.cat): Fau!TLI.cat
Selection col. number: 1

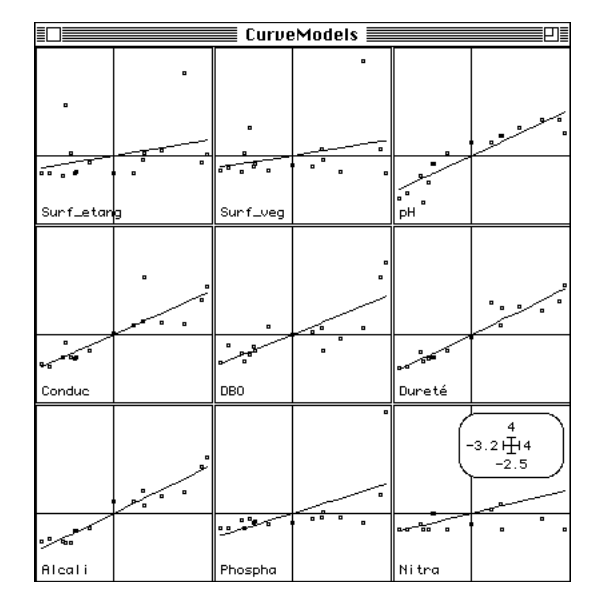
Graph1D
100
-2.7 2.3
0

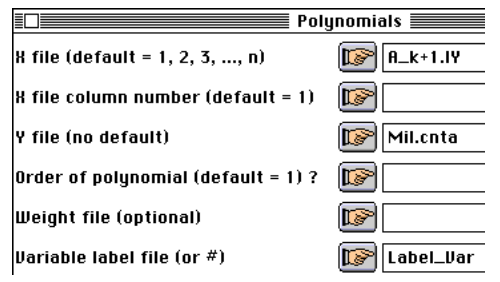
Pour les groupes 4 (Ephemeroptera), 8 (Malacostraca) et 9 (Mollusca), tous les coefficients sont positifs et l'axe est un "facteur taille", donc l'acidité un facteur globalement limitant. Au contraire pour d'autres groupes, les poids canoniques sont des deux signes et l'opposition d'espèces sur un gradient définit la structure.

Ceci est conforme au sommaire de l'article : *Many invertebrate taxa, from species to entire phyla, were not found below pH 5.5, but few characteristically "acidophilic" taxa were apparent .*

Sur les axes de co-inertie, dans l'espace des lignes de **Y**, chaque ligne a une coordonnée, dite score de coinertie pour **Y**. L'interprétation de ce score comme synthèse des apports chimiques ne pose pas de questions, ce qui est sous-jacents à la mention du sommaire de l'article : *Numbers of macroinvertebrate of these ponds are highly correlated with pH and probably, with other associated aspects of water chemistry.*

```
A_k+1.lY is a binary file with 16 rows and 2 columns
It contains the coordinates of the rows (table Y)
File :A_k+1.lY
|Col.|   Mini   |   Maxi   |
|----|----------|----------|
|   1|-2.935e+00| 3.812e+00|
|   2|-2.125e+00| 3.663e+00|
|----|----------|----------|
```






```
A_k+1.lX is a binary file with 160 rows and 2 columns
It contains the coordinates of the rows (table Xk)
It is to be used with --TCc.label and --TCc.cat files
File :A_k+1.lX
|Col.|   Mini   |   Maxi   |
|----|----------|----------|
|   1|-1.137e+00| 2.113e+00|
|   2|-1.283e+00| 1.055e+00|
|----|----------|----------|
```

Sur les axes de co-inertie, dans l'espace des lignes de $\mathbf{X}_k$, chaque ligne a une coordonnée, dite score de coinertie pour $\mathbf{X}_k$. La moyenne des carrés des covariances entre score depuis **Y** et score pour $\mathbf{X}_k$ (pondération π_k) est optimisée.

Labels

Data file (no default) — A_k+1.lX

Rows label file (default = #) — Label_StaTCc

Variable label file (or #)

Vertical (1) or horizontal (2) graphs — 2

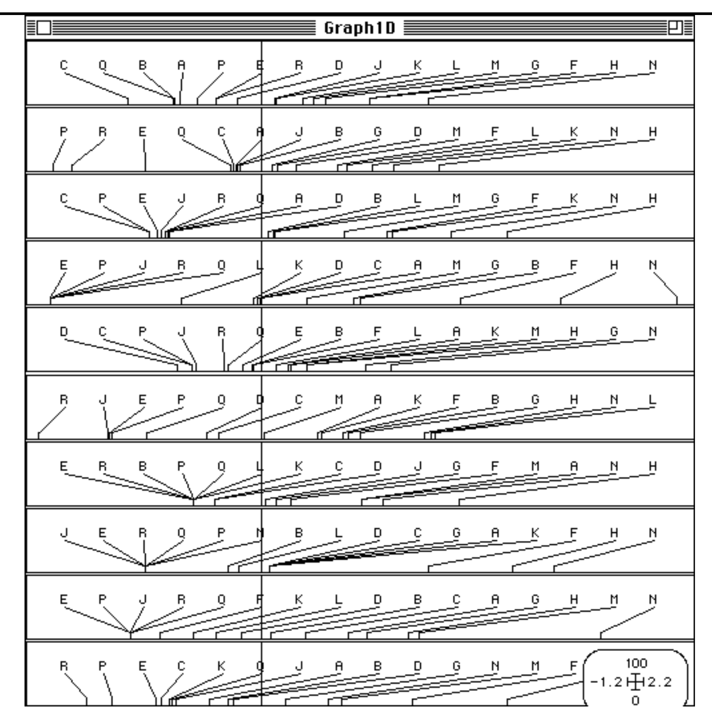
Row & col. selection

Col. selection: 1

Row selection method: File / Keyboard

Row selection file (.cat): Fau!TCc.cat

Selection col. number: 1



Comme d’habitude, les scores de co-inertie sont caractérisés par une partie inertie (pour optimiser une covariance, on a intérêt à optimiser partiellement la variance) et une partie corrélation. Chaque groupe a une capacité plus ou moins grande à distinguer les stations, ce qui peut se mesurer par la variance projetée (ci-dessus graphiquement et plus loin numériquement).

En outre, les scores de coinertie pour les différents tableaux sont tous référés aux scores de coinertie correspondants dans l’unique tableau **Y** et sont donc rendus ainsi cohérents. On rend compte de la partie corrélation par normalisation respective de ces scores :

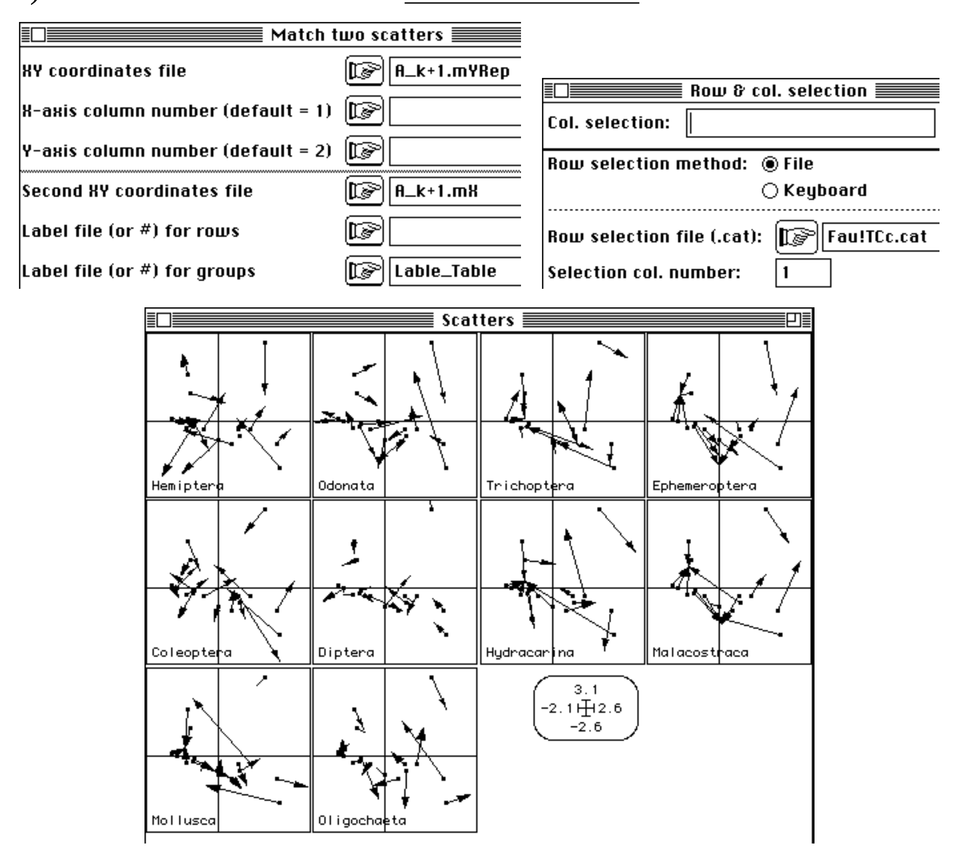
```
A_k+1.mX is a binary file with 160 rows and 2 columns
It contains the normalized coordinates of the rows (table Xk)
It is to be used with --TCc.label and --TCc.cat files
File :A_k+1.mX
|Col.|   Mini   |   Maxi   |
|----|----------|----------|
|   1|-2.008e+00| 2.542e+00|
|   2|-2.515e+00| 3.095e+00|
|----|----------|----------|

A_k+1.mY is a binary file with 16 rows and 2 columns
It contains the normalized coordinates of the rows (tableY)
File :A_k+1.mY
|Col.|   Mini   |   Maxi   |
|----|----------|----------|
|   1|-1.348e+00| 1.751e+00|
|   2|-1.599e+00| 2.756e+00|
|----|----------|----------|

A_k+1.mYRep is a binary file with 160 rows and 2 columns
It contains the normalized coordinates of the rows (table Y)
Duplication of the previous file ---.mY
It is to be used with --TCc.label and --TCc.cat files
It is to be matched with A_k+1.mX files
File :A_k+1.mYRep
|Col.|   Mini   |   Maxi   |
|----|----------|----------|
|   1|-1.348e+00| 1.751e+00|
|   2|-1.599e+00| 2.756e+00|
|----|----------|----------|
```

Les noms de fichiers sont conformes à ceux du programme CoInertia, seule la multiplicité des tableaux d’un côté augmente la difficulté des représentations.

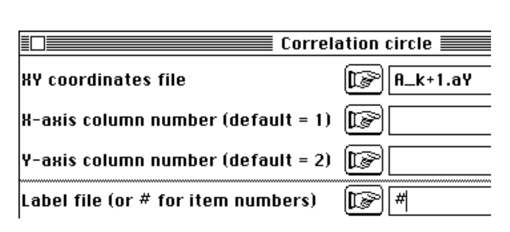
Pour exprimer directement la partie corrélation, on utilisera en dimension 2 (ce qui est ici abusif) l'extension multifenêtrée de Match two scatters :

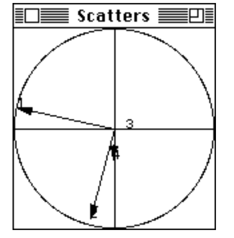


Les origines des flèches, identiques d'un tableau à l'autre, donne la projection normalisée du nuage par le tableau de milieu et chaque fenêtre contient la projection normalisée du nuage défini par chaque groupe faunistique. De nombreuses erreurs de position sont l'expression de la phrase du sommaire de l'article : *Details of species composition of the macroinvertebrate fauna differ widely even between ponds of similar pH.*

On peut enfin projeter sur les axes de coinertie de chaque espace les axes principaux d'inertie.

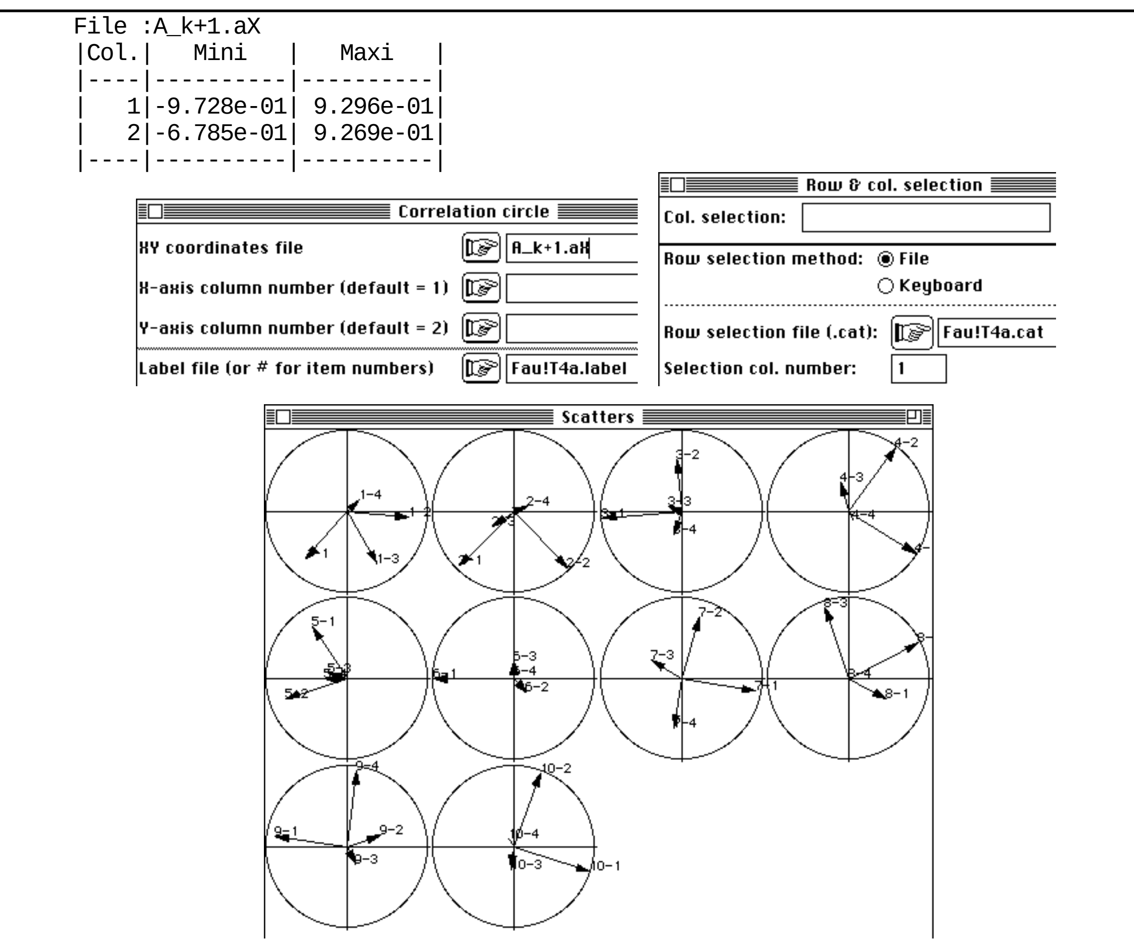
```
A_k+1.aY is a binary file with 4 rows and 2 columns
It contains the coordinates of the projections of inertia
axes onto the co-inertia axes (table Y)
File :A_k+1.aY
|Col.|   Mini    |   Maxi    |
|----|----------|----------|
|   1|-9.628e-01| 1.264e-01|
|   2|-8.948e-01| 2.049e-01|
|----|----------|----------|
```





On observe encore que, pour le milieu, l'axe principal de coinertie est très voisin de l'axe principal d'inertie. C'est loin d'être vrai dans les espaces des groupes faunistiques :

```
A_k+1.aX is a binary file with 40 rows and 2 columns
It contains the coordinates of the projections of inertia
axes onto the co-inertia axes (tables Xk)
It is to be used with --T4a.label and --T4a.cat files
```



File :A_k+1.aX

Col.	Mini	Maxi
1	-9.728e-01	9.296e-01
2	-6.785e-01	9.269e-01

Le programme s'achève par les statistiques de base déjà décrite dans la documentation thématique (fascicule 4). Pour **Y**, on compare la variance projetée sur les axes de coinertie (varianY) avec l'optimum qui est la variance projetée sur les axes d'inertie (INERY) :

Table Y

Num	varianY	INERY
1	4.742e+00	4.986e+00
2	1.766e+00	1.866e+00

On fait de même pour les $\mathbf{X}_k$, en complétant par une étude de la valeur en terme de coinertie des axes de coinertie coordonnés et des axes de coinertie des analyses séparées (voir K+1 : Initialize) :

Table X n° 1

Num	Covaria.	Cova*Cova	Sum ratio	Correla.	VarianX	INERX
1	6.834e-01	4.670e-01	7.949e-01	7.468e-01	1.766e-01	2.413e-01
2	2.563e-01	6.571e-02	9.068e-01	5.501e-01	1.229e-01	1.805e-01

Table X n° 2

Num	Covaria.	Cova*Cova	Sum ratio	Correla.	VarianX	INERX
1	9.118e-01	8.314e-01	7.742e-01	7.917e-01	2.797e-01	3.243e-01
2	2.629e-01	6.911e-02	8.385e-01	3.748e-01	2.786e-01	2.778e-01

...

Comparons les résultats sur le tableau 5. Par la présente option on obtient :

```
Table X n° 5
-----------------------------------------------------------------
|Num| Covaria.|Cova*Cova|Sum ratio| Correla.| VarianX | INERX   |
-----------------------------------------------------------------
|  1|5.018e-01|2.518e-01|7.425e-01|7.534e-01|9.352e-02|1.436e-01|
|  2|1.966e-01|3.867e-02|8.566e-01|5.270e-01|7.882e-02|9.812e-02|
-----------------------------------------------------------------
```

Par l'analyse séparée on avait :

```
Table n°:   5| Lig:  13| Col:   9| Rank:   9|
Total co-inertia: 3.390e-01  | RV: 2.999e-01|
---------------------------------------------
|Num|Eigenval.| Covaria.|   Ratio |Sum ratio|
---------------------------------------------
|  1|2.598e-01|5.097e-01|7.661e-01|7.661e-01|
|  2|3.963e-02|1.991e-01|1.169e-01|8.830e-01|
|  3|2.298e-02|1.516e-01|6.778e-02|9.508e-01|
|  4|8.562e-03|9.253e-02|2.525e-02|9.761e-01|
---------------------------------------------
```

La première valeur propre de l'analyse de coinertie du tableau 5 avec **Y** valait 0.2598, soit 76.6 % de la coinertie totale (0.3390). Le carré de la covariance du score de coinertie dans l'analyse coordonnée (0.2518) ne peut dépasser l'optimum mais en donnant 74.3 % de la coinertie de départ s'en rapproche fortement. Les autres mentions (Correla., VarianX, INERX) s'interprètent comme en coinertie simple.

Cette option est donc simplement une extension de l'analyse de coinertie. Elle fonctionne sur tout type d'analyse initiale et son interprétation doit tenir compte des propriétés particulières de chaque cas.



1 Lafosse, R. & Hanafi, M. (1998) Concordance d'un tableau avec K tableaux : définition de K+1 uples synthétiques. *Revue de Statistique Appliquée* : (sous presse).

2 Chessel, D. & Hanafi, M. (1996) Analyses de la co-inertie de K nuages de points. *Revue de Statistique Appliquée* : 44, 35-60.

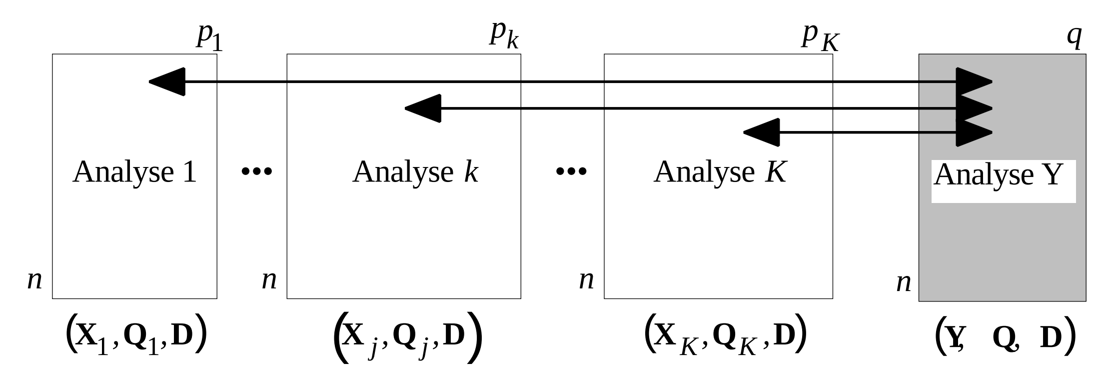
3 Friday, L.E. (1987) The diversity of macroinvertebrate and macrophyte communities in ponds. *Freshwater Biology* : 18, 87-104.

K+1 : Initialize

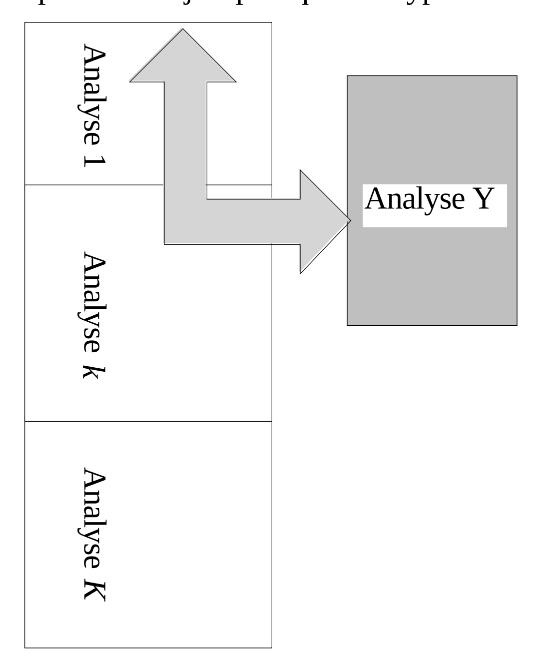


Utilitaire d'initialisation d'une analyse de concordance.

L'analyse des concordances coordonne *K* analyses de co-inertie entre des tableaux $\mathbf{X}_k$ et un tableau **Y**. Le schéma théorique se résume à :



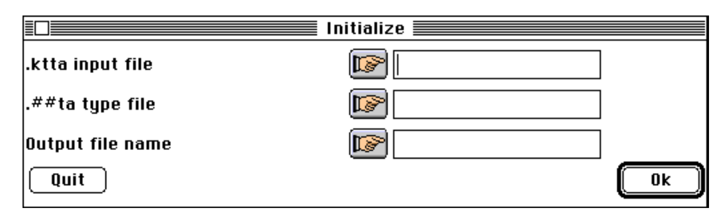
Chaque flèche ci-dessus représente une analyse de co-inertie potentielle (voir le module CoInertia). On présentera les *K* tableaux dans un *K*-tableaux en blocs de lignes avec un triplet du type ktta (voir les options de KTabUtil) et le tableau Y dans un triplet statistique ordinaire. L'option couple deux objets pratiques du type :



Elle vérifie la cohérence de l'information proposée et elle assure les *K*+1 analyses d'inertie sous-jacentes et les *K* analyses de coinertie préalables à l'utilisation de K+1 : Concordance analysis.



L'option utilise une seule fenêtre de dialogue :



Nom du fichier binaire d'entrée de type ktta contenant les tableaux $\mathbf{X}_k$.

Nom du fichier binaire d'entrée de type ##ta contenant le tableau **Y**.

Nom générique des fichiers de sortie (création).



Utiliser la carte de données Friday [1] :

```
FRIDAY (L.E.) 1987 (91-16)/(16-9)                    Link  Card

3000000200000000     A1  11  Q
2000000000000001     A2  7   P
2322243133111000     A3  13  R
1002001000100001     A4  4   J
1002010000100011     A5  13  E      Surf.
0101002100111223     A6  22  C      Surf.
1380,187,38,215,8    A7  4   D
87,35,40,125,7,14    A8      K
63,63,42,110,21,1    A9  Q   B
472,407,47,150,14    Aa  P   A
23,23,50,150,15,3    Ab  R   G
67,67,55,145,20,2    B1  J   M
100,100,55,150,17    B2      L
292,38,60,180,35,    B3      F
Tableau faunistique 91 taxons-16 étangs
```

Vérifier que la procédure automatique de création d'un dossier de travail a créé les fichiers Fau (91 lignes-espèces et 16 colonnes-stations), Blo (10 lignes et une colonne, indicateur des blocs de lignes du tableau fau), Mil (16 lignes-stations et 9 colonnes-variables) et les fichiers d'étiquettes (Label_Esp, Label_Sta, Label_StaTCc et Label_Var).

Faire l'ACP normée du tableau Mil (PCA : Correlation matrix PCA) :

Correlation matrix PCA

Matrix input file	Mil	16	9

Préparer le *K*-tableaux (KTabUtil : InitKTab) :

InitKTab

Matrix input file	Fau	91	16
Row indicator (Default = 1 class)	Blo	10	1
Col indicator (Default = 1 class)			
Option: output file name			

Assurer le centrage par ligne (taxon) :

CentringKtab

---.ktp input file	Fau!.ktp		
Matrix input file	Fau	91	16
Row weight (default 1/nk)			
Column weight (default 1/pj)			
Centring option (no default)	3		
Option: output file name			

Utiliser la présente option :

Initialize

.ktta input file	Fau.ktta	91	16
.##ta type file	Mil.cnta	16	9
Output file name	A		

Les opérations suivantes ont été effectuées :

```
First Input File Fau.ktta
---> rows: 91, columns: 16
Second Input File Mil.cnta
---> rows: 16, columns: 9

New ASCII file: A.k+1
It contains the input file names

New binary file: A.k+1ta. It contains the crossed K-table
It has 91 rows and 9 columns
```

La pondération des colonnes de Fau.ktpc est identique à la pondération des lignes de Mil.cnpl. Les deux objets peuvent être associés. Les noms des fichiers utilisés sont écrits dans le fichier A.k+1.

```
---------------------------------
| Xk - Separate inertia analysis |
---------------------------------
```

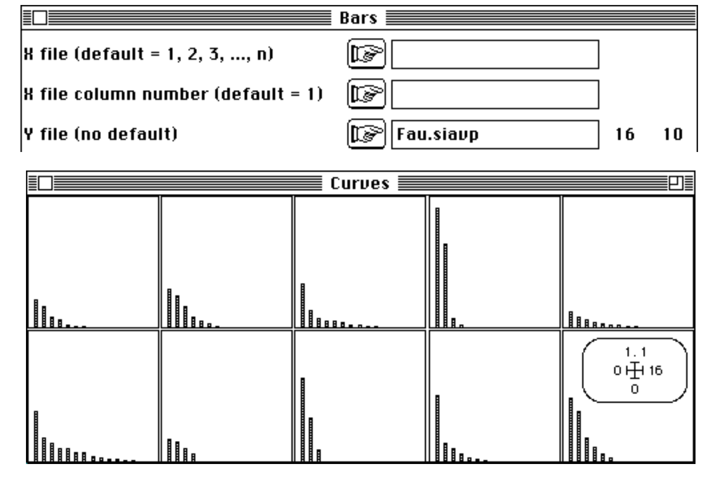
L'analyses d'inertie de chacun des tableaux $\mathbf{X}_k$ est effectuée et donne l'information :

```
Table n°:   5| Lig:  13| Col:  16| Rank:  12|
Total inertia: 5.063e-01| Squared norm (H.-S.): 4.273e-02
Num. Eigenval.   R.Iner.  R.Sum    |Num. Eigenval.   R.Iner.  R.Sum  |
01   +1.4362E-01 +0.2837 +0.2837   |02   +9.8125E-02 +0.1938 +0.4775 |
03   +7.5690E-02 +0.1495 +0.6270   |04   +5.4516E-02 +0.1077 +0.7346 |
05   +4.2816E-02 +0.0846 +0.8192   |06   +2.9499E-02 +0.0583 +0.8775 |
07   +2.3867E-02 +0.0471 +0.9246   |08   +1.8063E-02 +0.0357 +0.9603 |
09   +1.1937E-02 +0.0236 +0.9839   |10   +4.4710E-03 +0.0088 +0.9927 |
11   +2.3669E-03 +0.0047 +0.9974   |12   +1.3390E-03 +0.0026 +1.0000 |
13   +0.0000E+00 +0.0000 +1.0000
-------------------------------------------------------------------
```

On retrouve le numéro du tableau (il y en a 10), le nombre de lignes (13), le nombre de colonnes (16), le rang (12), l'inertie totale (0.5063) et la variance vectorielle VAV ou carré de la norme d'Hilbert-Schmit (somme des carrés des valeurs propres, 0.04273). Les valeurs propres de l'analyse sont éditées.

```
Eigenvalues are stored by column into file Fau.siavp
Row : 16 - Col (tables): 10
```

Les valeurs propres de chaque analyse sont conservées ce qui permet de comparer l'inertie et la structure d'une analyse à l'autre (Curves : Bars) :



Noter la structure à une ou deux dimensions de la plupart des tableaux. Sont créés des fichiers qui seront utilisés par la suite :

```
File Fau.siaTLlax contains normed row scores (principal axes)
in the separate inertia analyses
It has 91 rows and 4 columns

File Fau.siaTCcax contains normed column scores (principal components)
in the separate inertia analyses
It has 160 rows and 4 columns

File Fau.siapa contains rank, total inertia and squared norm of
Hilbert-Schmidt
for each separate analyses
It has 10 rows and 3 columns
```

L'analyse simple du tableau **Y** est ensuite refaite :

```
--------------------------------
| Y - Separate inertia analysis |
--------------------------------
Input file: Mil.cnta
--- Number of rows: 16, columns: 9
------------------------
Total inertia: 9.000e+00
```

```
------------------------
Num. Eigenval.   R.Iner.  R.Sum    |Num. Eigenval.   R.Iner.  R.Sum  |
01   +4.9862E+00 +0.5540 +0.5540   |02   +1.8655E+00 +0.2073 +0.7613 |
03   +1.1159E+00 +0.1240 +0.8853   |04   +4.3821E-01 +0.0487 +0.9340 |
05   +3.5089E-01 +0.0390 +0.9730   |06   +9.5660E-02 +0.0106 +0.9836 |
07   +7.2313E-02 +0.0080 +0.9916   |08   +4.4123E-02 +0.0049 +0.9965 |
09   +3.1190E-02 +0.0035 +1.0000

File Mil.cnvp contains the eigenvalues and relative inertia for each axis
--- It has 9 rows and 2 columns

File Mil.cncax contains the normed column scores (principal axes)
--- It has 9 rows and 4 columns

File Mil.cnlax contains the normed row scores (principal component)
--- It has 16 rows and 4 columns
```

Les fichiers conservés seront de même utilisés ensuite. Les analyses de co-inertie entre chacun des $\mathbf{X}_k$ et $\mathbf{Y}$ sont ensuite exécutées :

```
-------------------------------
| Separate co-inertia analysis |
-------------------------------
```

Pour chacune de ces analyses, le listing donne :

```
Table n°:   5| Lig:  13| Col:   9| Rank:   9|
Total co-inertia: 3.390e-01  | RV: 2.999e-01|
---------------------------------------------
|Num|Eigenval.| Covaria.|   Ratio |Sum ratio|
---------------------------------------------
|  1|2.598e-01|5.097e-01|7.661e-01|7.661e-01|
|  2|3.963e-02|1.991e-01|1.169e-01|8.830e-01|
|  3|2.298e-02|1.516e-01|6.778e-02|9.508e-01|
|  4|8.562e-03|9.253e-02|2.525e-02|9.761e-01|
---------------------------------------------
```

On trouve le numéro du tableau, le nombre de lignes (13 espèces) et le nombre de colonnes (9 variables de milieu) de l'opérateur de co-inertie associée , ainsi que son rang. Une bonne compréhension de l'analyse de coinertie élémentaire est ici souhaitable (voir CoInertia : Coinertia analysis). Les quatre premières valeurs propres sont éditées ensuite (si le rang est inférieur à 4, l'édition est évidemment limitée au rang). Ces valeurs propres sont des carrés de covariances (colonne Covaria.). Le pourcentage de la coinertie totale prise en compte par chaque valeur propre est disponible dans la colonne Ratio et le pourcentage cumulé est donné dans la colonne Sum ratio.

Rappel : si deux tableaux $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont utilisés dans des triplets compatibles $(\mathbf{X},\mathbf{Q},\mathbf{D})$ et $(\mathbf{Y},\mathbf{R},\mathbf{D})$, la coinertie associée à un couple de vecteurs $\mathbf{u}$ ($\mathbf{Q}$-normé) et $\mathbf{V}$ ($\mathbf{R}$-normé) est la quantité $\gamma(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \langle \mathbf{XQu} | \mathbf{YRv} \rangle_{\mathbf{D}} = \mathbf{u}^t\mathbf{QX}^t\mathbf{DYRv}$ (en général, si les tableaux sont centrés, cette quantité représente la covariance entre les coordonnées des lignes de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ respectivement projetées sur $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$). La co-inertie associées à deux familles orthonormées (respectivement au sens de $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$) notées $\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_r\}$ et $\{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_r\}$ vaut $\gamma(\{\mathbf{u}\},\{\mathbf{v}\}) = \sum_{j=1,r}\gamma(\mathbf{u}_j,\mathbf{v}_j)$.

La coinertie totale est alors le maximum possible pour le choix des familles de référence :

$$\gamma = \underset{\{\mathbf{u}\},\{\mathbf{v}\}}{Max}\ \gamma(\{\mathbf{u}\},\{\mathbf{v}\})$$

Cette quantité égale l'inertie de l'opérateur de coinertie, ou encore :

$$\gamma = Trace\left(\mathbf{X}^t\mathbf{DYRY}^t\mathbf{DXQ}\right) = Trace\left(\mathbf{YRY}^t\mathbf{DXQX}^t\mathbf{D}\right)^{\mathbf{2}}$$

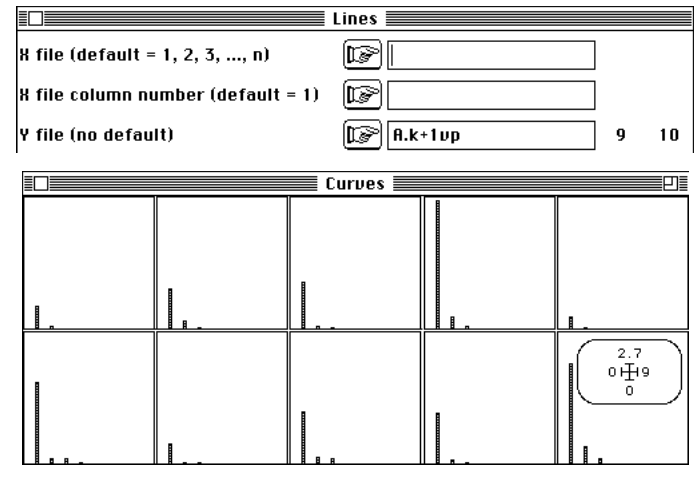
On retrouve la covariance vectorielle COVV entre les deux tableaux, ce qui définit :

$$RV(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = COVV(\mathbf{X},\mathbf{Y}) / \sqrt{VAV(\mathbf{X})VAV(\mathbf{Y})}$$

```
Eigenvalues (separate co-inertia) are stored by column into file A.k+1vp
Row : 9 - Col (tables): 10

File A.k+1lr contains rank, total co-inertia and RV
for each separate co-inertia analyse
It has 10 rows and 3 columns
```

Ces paramètres sont conservés dans des fichiers. On utilisera cette information pour examiner la variabilité de la costructure entre tableaux. Les ensembles de valeurs propres de coinertie sont :



Les costructures sont en général à une dimension.

Fau.siapa

	1	2	3
1	11.0000	0.6832	0.1072
2	7.0000	0.9994	0.2317
3	13.0000	0.8705	0.1794
4	4.0000	1.8076	1.5066
5	12.0000	0.5063	0.0427
6	15.0000	1.3814	0.2957
7	4.0000	0.5576	0.0861
8	3.0000	1.1823	0.6430
9	8.0000	1.0068	0.3621
10	6.0000	1.4043	0.5361

A.k+1lr

	1	2	3
1	9.0000	0.5875	0.3281
2	7.0000	1.0739	0.4078
3	9.0000	1.1300	0.4877
4	4.0000	2.9838	0.4444
5	9.0000	0.3390	0.2999
6	9.0000	1.9803	0.6658
7	4.0000	0.5045	0.3143
8	3.0000	1.3498	0.3077
9	8.0000	1.2296	0.3736
10	6.0000	2.5925	0.6473

Rangs, inertie et variance vectorielle des tableaux, rangs, coinertie et RV des opérateurs de coinertie varient largement d'un groupe faunistique à l'autre. Dans l'analyse de coinertie simultanée, on devra donc pondérer l'influence de chaque groupe pour limiter la prépondérance du groupe 4.



1 Friday, L.E. (1987) The diversity of macroinvertebrate and macrophyte communities in ponds. *Freshwater Biology* : 18, 87-104.

2 Escoufier, Y. (1973) Le traitement des variables vectorielles. *Biometrics* : 29, 750-760.